ZAHLEN ZÄHLEN

Kurzfassung: Es wird eine abzählbare Anordnung „aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1“ gegeben. Auf Grund dieser Anordnung wird eine beliebige Diagonalzahl nach Cantor gebildet. Anschließend wird gezeigt, dass bereits die Definition dieser Diagonalzahl einen Widerspruch enthält. Der Versuch, die Unvollständigkeit der Anordnung durch die Bildung einer Diagonalzahl zu zeigen, misslingt.

Definitionen:

Π : = (2, 3, ... π_i, ...) ist die Folge aller der Größe nach angeordneten Primzahlen

α_i, (i = 1, 2, ... ω), sind ω zugelassene Schriftzeichen, beispielsweise Buchstaben, Ziffern, Symbole, das Spatium usw. in verschiedenen Schriftarten, wie Latein, Griechisch, Gotisch, mager, fett usw., auf der Zeile, höher- oder tiefergestellt usw.

$\Omega : = \{ \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\omega \}$ ist die Menge aller zugelassenen Schriftzeichen. Es kann sich z.B. um alle in einer Druckerei oder auf einem PC zur Verfügung stehenden Zeichen handeln.

${}^{L}ZF : = \alpha_{i1}\ \alpha_{i2} \dots \alpha_{iL}$ ist eine Zeichenfolge ZF der Länge L, bestehend aus L angeordneten Schriftzeichen $\alpha_k \in \Omega$ mit k = i1, i2, ... iL.

ZF(E) bedeute, ein Element E (eine Zahl oder ein sonstiges Denkobjekt) werde durch die Zeichenfolge ZF eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben.

Jeder durch eine endliche Zeichenfolgen ZF(r) eindeutig und widerspruchsfrei beschreibbaren reellen Zahl r mit 0 < r < 1 wird eine natürliche Zahl n = n[ZF(r)] wie folgt zugeordnet:
Für ZF(r): = $\alpha_{i1}\ \alpha_{i2} \dots \alpha_{iL}$ sei n[ZF(r)] = $\pi_1^{i1} \bullet \pi_2^{i2} \bullet \dots \bullet \pi_L^{iL}$ wobei π_k die k^{te} Primzahl aus der Folge Π ist. Jeder endlichen Zeichenfolge ZF wird damit genau eine natürliche Zahl n[ZF] zugeordnet. Nun können alle Zeichenfolgen nach der Größe von n in einer Folge **ZFA** angeordnet werden.

Jeder reellen Zahl r mit 0 < r < 1 wird eine natürliche Zahl n_r wie folgt zugeordnet:
Es sei M{ZF(r)} die Menge aller jener Zeichenfolgen ZF(r), welche die Zahl r eindeutig und widerspruchsfrei beschreiben. Nun sei $n_r = \min\limits_{M\{ZF(r)\}} n[ZF(r)]$. Man wählt also aus allen r eindeutig und widerspruchsfrei beschreibenden Zeichenfolgen jene mit dem kleinsten zugeordneten n. Alle durch eine endliche Zeichenfolge eindeutig und widerspruchsfrei beschreibbaren reellen Zahlen r zwischen 0 und 1 können nun nach der Größe von n_r in einer Anordnung A(r) abzählbar angeordnet werden.

Behauptung: Die Anordnung A(r) ist vollständig.

Einwand nach Cantor:

Die reellen Zahlen aus A(r) können in (unendliche) Dezimalzahlen entwickelt werden. Es sei r_n die n^{te} reelle Zahl aus A(r) mit

$$
\begin{array}{l}
r_1 = 0.r_{11}\ r_{12} \ldots\ldots r_{1n} \ldots\ldots \\
r_2 = 0.r_{21}\ r_{22} \ldots\ldots r_{2n} \ldots\ldots \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
r_n = 0.r_{n1} r_{n2} \ldots\ldots r_{nn} \ldots\ldots \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{array}
$$

Man bildet nun nach Cantor eine **Diagonalzahl** c = $0.c_1\ c_2 \ldots\ldots c_n \ldots\ldots$ mit $\forall n$: $c_n \neq r_{nn}$. Dies wird etwa durch $c_n = r_{nn} + 1$ für $r_{nn} \neq 9$ und $c_n = 0$ für $r_{nn} = 9$ erreicht. Es gilt dann $0 \leq c \leq 1$ und, wie von Cantor gefordert, $\forall n$: $c \neq r_n$, Die Diagonalzahl fehlt also in der Anordnung A(r), diese ist unvollständig.

Gegenbeweis:

Der Einwand geht davon aus, dass die Diagonalzahl c durch die hier gegebene Definition **eindeutig und widerspruchsfrei** beschrieben wurde. Diese Definition hat die Form einer Zeichenfolge ZF(c). Nun sei $m_c = n_c = \min\limits_{M\{ZF(c)\}} n[ZF(c)]$ die kleinste c zugeordnete natürliche Zahl. Die c beschreibende Zeichenfolge steht also in ZFA an der Stelle $m = m_C$ und es gilt $c_n = r_{mn}$, insbesondere $c_m = r_{mm}$, im Widerspruch zur Forderung von Cantor $\forall n$: $c_n \neq r_{nn}$. Der Versuch, c gemäß Cantor eindeutig und widerspruchsfrei zu beschreiben, ist also misslungen. Damit ist auch der Einwand nach Cantor hinfällig.